Hovedsætninger

om

de overelliptiske Functioner

ved

Adolph Steen.

Hovedsætninger om de overelliptiske Functioner.

1. Naar man i

$$\int \frac{P dx}{R} \qquad (1)$$

har P at være en rational Function af x og

$$R = \sqrt[n]{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_p x^p + \ldots a_{2n} x^{2n}} = \sqrt[n]{\varphi(x)},$$

kan man ved Decomposition udtrykke (1) ved en Sum af Integraler af Formerne

$$\Psi_m = \int \frac{x^m dx}{R}, \quad \Xi_k = \int \frac{dx}{(1+rx)^k R}, \qquad (2)$$

idet m er heel, k positiv heel, r reel eller imaginær. For Integralerne (2) kunne angives Reductionsformler, som for det specielle Tilfælde $n=2$ indbefatte de bekjendte Formler*), som före til de elliptiske Functioner.

Man har nemlig

$$\frac{d.\, x^{m-(2n-1)} R^{n-1}}{dx} = (m-2n+1) x^{m-2n} R^{n-1} + \frac{(n-1) x^{m-2n+1} (a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + p a_p x^{p-1} + \ldots + 2n a_{2n} x^{2n-1})}{nR}$$

eller, idet

$$\sum_{p=o}^{p=h} \varphi(p) = \varphi(0) + \varphi(1) + \varphi(2) + \ldots + \varphi(h),$$

$$\frac{d.\, x^{m-(2n-1)}}{dx} = \sum_{p=o}^{p=2n} \left[m - \left(2n - 1 - \frac{p(n-1)}{n} \right) \right] \frac{a_p x^{m-2n+p}}{R},$$

hvoraf atter ved Integration udledes

$$x^{m-(2n-1)} R^{n-1} = \sum_{p=o}^{p=2n} \left[m - \left(2n - 1 - \frac{p(n-1)}{n} \right) \right] a_p \Psi_{m-2n+p}. \qquad (3)$$

---

*) *Ramus* Diff. og Int. Regning p. 48.

Sættes $m = 2n - 1$, faaes en Relation imellem Ψ_0, Ψ_1, $\Psi_2 \ldots \Psi_{2n-1}$, saa at enhver af disse er bestemt ved de $2n-1$ andre. Andre Værdier af m give lignende Formler til Bestemmelse af Ψ_{2n+r-1} ved $2n$ andre. Navnlig ville alle Functionerne Ψ med höjere positive Indices kunne udtrykkes ved de $2n-1$

$$\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2, \ldots \Psi_{2n-2}.$$

Naar $m < 2n-1$, erholdes negative Indices i (3), men Functioner af höjere Indices kunne stedse udtrykkes ved dem af lavere og disse igjen ved de med positive, med Undtagelse af Ψ_{-1}, som for $m = 2n-2$ indgaaer i Formlen tilligemed Ψ_{-2}, men faaer 0 til Coefficient, naar $m = 2n-1$. Men da $x = \frac{1}{z}$ overhovedet giver

$$\int \frac{x^{-m}\,dx}{R} = \int \frac{z^m\,dz}{Z},$$

idet

$$Z = \sqrt[n]{a_0 z^{2n} + a_1 z^{2n-1} + a_2 z^{2n-2} + \ldots + a_p z^{2n-p} \ldots + a_{2n}},$$

bliver almindelig Ψ_{-m} reduceret til Ψ_m og altsaa Ψ_{-1} til Ψ_1.

Saalænge r er reel vil Ξ_k transformeres til Ψ_k ved Substitutionen $1 + rx = \frac{1}{z}$, men imaginære Værdier af r vilde give imaginære Coefficienter i Rodstörrelsen; Reductionen skeer derfor i dette Tilfælde helst ved en ny Formel. Man sætter

$$1 + rx = \omega,\ a_0 + a_1 \frac{\omega - 1}{r} + a_2 \frac{(\omega-1)^2}{r^2} + \ldots + a_{2n} \frac{(\omega-1)^{2n}}{r^{2n}} = b_0 + b_1 \omega + b_2 \omega^2 + \ldots + b_{2n} \omega_{2n},$$

hvor $b_0, b_1, b_2, \ldots b_{2n}$ ere Functioner af $a_0, a_1, a_2, \ldots a_{2n}$ og r. Man faaer nu

$$\frac{d.(1+rx)^{-k+1} R^{n-1}}{dx} = r \frac{d.\omega^{-k+1} \sqrt[n]{(b_0 + b_1\omega + b_2\omega^2 + \ldots + b_{2n}\omega^{2n})^{n-1}}}{d\omega}$$

$$= r\left[-(k-1)\omega^{-k} R^{n-1} + \frac{(n-1)\omega^{-k+1}(b_1 + 2b_2\omega + 3b_3\omega^2 + \ldots 2nb_{2n}\omega^{2n-1})}{nR}\right]$$

$$= -r \sum_{p=o}^{p=2n} \left[k - 1 - \frac{p(n-1)}{n}\right] \frac{b_p \omega^{-k+p}}{R},$$

som atter integreret giver

$$\frac{-R^{n-1}}{r(1+rx)^{k-1}} = \sum_{p=o}^{p=2n} \left[k - 1 - \frac{p(n-1)}{n}\right] b_p \Xi_{k-p}. \qquad (4)$$

Sættes heri $k = 1$, faaes en Relation imellem Ξ_0, Ξ_{-1}, $\Xi_{-2} \ldots \Xi_{-(2n-1)}$, saa at enhver af disse er udtrykt ved de $2n-1$ andre. Faaer derimod k andre Værdier, vil enhver Function Ξ_{1-q-p} kunne udtrykkes ved $2n$ andre. Navnlig kunne alle Functioner med höjere negative Indices reduceres til de $2n-1$

$$\Xi_0, \Xi_{-1}, \Xi_{-2} \ldots \Xi_{-(2n-2)}.$$

Naar $k > 1$, erholdes positive Indices i (4), men Functioner af höjere Indices udtrykkes stedse ved de med lavere og disse igjen ved de med negative, undtagen Ξ_1, som for $k=2$ indgaaer i Formlen tilligemed Ξ_2, men faaer 0 til Coefficient, naar $k=1$.

Da man altid vil have

$$\Xi_{-(2n-q-2)} = \Psi_0 + \frac{2n-q-2}{1} r\Psi_1 + \frac{(2n-q-2)(2n-q-3)}{1.2} r^2 \Psi_2 + \ldots + r^{2n-q-2} \Psi_{2n-q-2}$$

eller symbolsk fremstillet

$$\Xi_{-(2n-q-2)} = (1 + r\Psi)^{2n-q-2},$$

idet Exponenterne for Ψ forandres til Indices, saa vil ikkun Ξ_1 være et nyt irreductibelt Integral.

Fölgelig kan (1) udtrykkes ved Summen af en algebraisk Function og af Integraler af Formen

$$\int\left(\frac{A}{1+rx} + A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_{2n-2} x^{2n-2}\right)\frac{dx}{R}. \quad (5)$$

2. Naar $a_1 = a_3 = a_5 = \ldots = a_{2n-1} = 0$, bliver Ψ_{2p+1} ved at sætte $x^2 = z$ til

$$\int \frac{z^p\, dz}{\sqrt[n]{a_0 + a_2 z + a_4 z^2 + \ldots a_{2n} z^n}}$$

og (3) forvandles til

$$x^{m-(2n-1)} R^{n-1} = \sum_{p=o}^{p=n}\left[m - \left(2n - 1 - \frac{p(n-1)}{n}\right)\right] a_{2p}\, \Psi_{m-2n+p},$$

saa at de irreductible Functioner blive ikkun

$$\Psi_0,\ \Psi_1,\ \Psi_2, \ldots \Psi_{n-2}.$$

3. De i (5) angivne Integraler, som ere irreductible til andre, danne en ny Classe Transcendenter, hvorunder de elliptiske ere indbefattede for $n=2$. De kunne kaldes *overelliptiske* (hyperelliptiques) af $(n-1)^{te}$ Classe, saa at de elliptiske ere af 1^{ste} Classe; hver Classe indeholder $2n$ forskjellige, men af de 4, som henhöre til 1^{ste} Classe er den ene reductibel til andre. De overelliptiske Functioner af i^{te} Classe have $n = i+1$, altsaa

$$R = \sqrt[i+1]{a_0 + a_1 x \ldots\ldots a_{2i+2} x^{2i+2}},$$

og ere $2i+2$ i Antal.

4. Transcendenterne (5) ere alle indbefattede i den mere almindelige

$$\psi(x) = \int \frac{f(x)dx}{(x-a)y^m(x)}, \quad (6)$$

hvor $f(x)$ er en heel Function af x, y eller $y(x)$ en af de n Rödder $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ $\ldots y_n(x)$ i Ligningen

$$y^n + p_1 y^{n-1} + p_2 y^{n-2} + \ldots + p_{n-1} y + p_n = 0, \quad (7)$$

hvor p_1, $p_2 \dots p_{n-1}$, p_n ere hele Functioner af x *). Naar man nemlig sætter

$$p_1 = p_2 = \dots = p_{n-1} = 0,\ p_n = -R^n = -\varphi(x),\ m = 1,$$

altsaa

$$y(x) = R = \sqrt[n]{\varphi(x)},$$

og desuden enten

$$f(x) = \frac{1}{r},\ a = -\frac{1}{r}$$

eller

$$f(x) = (x-a)\,x^m,$$

faaes respective

$$\psi(x) = \Xi_1,\ \psi(x) = \Psi_m.$$

5. Theoremet om Addition af Transcendenter af Formen (6) **) kan nu anvendes paa de nye Transcendenter. Ligning (7) og dens Rödder blive

$$y^n - R^n = 0,\ y_1 = R,\ y_2 = \alpha R,\ y_3 = \alpha^2 R,\ \dots . y_n = \alpha^{n-1} R,$$

idet 1, α, $\alpha^2 \dots . \alpha^{n-1}$ ere de n^{te} Rödder af 1. Sætter man dernæst

$$\Psi_m(x_k) = \alpha^{-i} \int_0^{x_k} \frac{x^m\,dx}{R}$$

og erindrer at $f(a) = 0$, faaes

$$\Psi_m(x_1) + \Psi_m(x_2) + \dots + \Psi_m(x_\mu) = C - \Pi \frac{t^m}{\sqrt[n]{\varphi(t)}} [l.s_1(t) + \alpha^{-1} l.s_2(t) + \alpha^{-2} l.s_3(t) \dots + \alpha^{-(n-1)} l.s_n(t)], \tag{8}$$

hvor x_1, $x_2 \dots x_\mu$ ere Rödder i den algebraiske Ligning

$$\rho(x) = s_1(x) . s_2(x) . s_3(x) \dots . s_n(x) = 0,$$

idet

$$s_{k+1}(x) = q\alpha^{(n-1)k} R^{n-1} + q_1\, \alpha^{(n-2)k} R^{n-2} + \dots + q_{n-1}$$

og q, q_1, $q_2, \dots q_{n-1}$ ere Functioner af x og andre uafhængige, og endelig $\Pi F(t)$ betyder Coefficienten til $\frac{1}{t}$ i Udviklingen af $F(t)$ efter aftagende Potenser af t.

For Transcendenten Ξ_1 faaes, idet man sætter

$$\Xi_1(x_k) = \alpha^{-i} \int_0^{x_k} \frac{dx}{(x-a)\,R},$$

et lignende Resultat, nemlig

*) *Ramus* Diff. og Int. Regn. p. 242.

**) *Ramus* Diff. og Int. Regn. p. 243, (312). *Jürgensen* Videnskabernes Selskabs naturvidsk. og math. Skrifter 8 Deel og Crelles Journal t. 23 p. 126. *Abel* oeuvres complètes t. II. p. 66.

$$\left.\begin{array}{l}\Xi_1(x_1)+\Xi_,(x_2)+\ldots.\Xi_1(x_\mu)=C+\dfrac{1}{\sqrt[n]{\varphi(a)}}\left[l.s_1(a)+\alpha^{-1}l.s_2(a)\ldots.+\alpha^{-(n-1)}l.s_n(a)\right]\\ \qquad -\Pi\dfrac{1}{(t-a)\sqrt[n]{\varphi(t)}}\left[l.s_1(t)+\alpha^{-1}l.s_2(t)\ldots.+\alpha^{-(n-1)}l.s_n(t)\right]\end{array}\right\}.\quad(9)$$

6. Hver Classe af de overelliptiske Functioner dele sig i 3 Arter, ligesom de elliptiske og ultraelliptiske, efter Beskaffenheden af Transcendenternes Sum. Da nemlig Substitution af $t=\frac{1}{u}$ i Leddet II i (8) frembringer en Udvikling efter stigende Potenser af u og af Formen

$$u^{2-m}(A_0+A_1u+\ldots.),$$

sees Leddet II at forsvinde saalænge $m=0$, men at maatte bibeholdes for alle Værdierne fra $m=1$ til $m=2n-2$. Man henregner derfor Transcendenten Ψ_0 til 1ste, Ψ_1, Ψ_2, ... Ψ_{2n-2} til 2den og Ξ_1 til 3die Art.

7. Anvendes det Foregaaende paa det specielle Tilfælde hvor $n=3$, faaes

$$\varphi(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+a_6x^6=-p_n,$$

$$y_1(x)=\sqrt[3]{\varphi(x)},\ y_2(x)=\alpha\sqrt[3]{\varphi(x)},\ y_3(x)=\alpha^2\sqrt[3]{\varphi(x)},$$

$$s_1(x)=q\sqrt[3]{\varphi^2(x)}+q_1\sqrt[3]{\varphi(x)}+q_2,$$

$$s_2(x)=q\alpha^2\sqrt[3]{\varphi^2(x)}+q_1\alpha\sqrt[3]{\varphi(x)}+q_2,$$

$$s_3(x)=q\alpha\sqrt[3]{\varphi^2(x)}+q_1\alpha^2\sqrt[3]{\varphi(x)}+q_2,$$

$$\rho(x)=q^3\varphi^2(x)+(q_1{}^3-3qq_1q_2)\varphi(x)+q_2{}^3$$

$$=A(x-x_1)(x-x_2)\ldots.(x-x_\mu).$$

Antages dernæst q, q_1, q_2 respective af Graderne λ, λ_1, λ_2, vil μ være lig den höjeste af Störrelserne

$$3(\lambda+4),\ 3(\lambda_1+2),\ 3\lambda_2,\ \lambda+\lambda_1+\lambda_2+6.$$

Forudsættes altsaa $q^3\varphi^2(x)$ ikke at være af lavere Grad end noget andet Led i $\rho(x)$, vil altsaa

$$\mu=3(\lambda+4)$$

og man kan sætte

$$3(\lambda-\lambda_1+2)=h_1,\ 3(\lambda-\lambda_2+4)=h_2,\ 2\lambda-\lambda_1-\lambda_2+6=h_3,$$

hvor h_1, h_2 og h_3 ere givne positive Tal. Man faaer da fremdeles

$$\mu=3(\lambda+4)=3(\lambda_1+2)+h_1=3\lambda_2+h_2=\lambda+\lambda_1+\lambda_2+6+h_3,$$

hvilket ikke kan finde Sted med mindre de 3 förste Udtryks Sum er 3 Gange saa stor som det sidste eller

$$h_3=\frac{h_1+h_2}{3};$$

h_1+h_2 maa altsaa være et Multiplum af 3. Til Bestemmelse af de $\lambda+\lambda_1+\lambda_2+3$ Coefficienter i de 3 Polynomer q, q_1, q_2 haves nu $\mu+1$ Ligninger. Man faaer altsaa ved disse Coefficienters Bortelimination, ifölge

$$3(\lambda+4)+1-(\lambda+\lambda_1+\lambda_2+3)=h_3+4$$

eller

$$3(\lambda_1+2)+h_1+1-(\lambda+\lambda_1+\lambda_2+3)=h_3+4$$

eller

$$3\lambda_2+h_2+1-(\lambda+\lambda_1+\lambda_2+3)=h_3+4,$$

h_3+4 Endeligninger, altsaa ogsaa $h_3+4=i$ ikke arbitrære Störrelser eller Hjælpestörrelser, som ere Functioner af $\mu-i=\mu-h_3-4=\lambda+\lambda_1+\lambda_2+2$ arbitrære. Det mindste Antal Hjælpestörrelser svarer altsaa til $h_3=0$, hvoraf fölger $h_1=0$, $h_2=0$, altsaa $i=4$, $\mu>4$. Men μ maa være et Multiplum af 3 og λ positiv, altsaa idetmindste $\mu=12$, hvoraf fölger

$$\lambda=0,\ \lambda_1=2,\ \lambda_2=4,\ h_1=h_2=h_3=0.$$

I

$$q=a_0,\ q_1=b_0+b_1x+b_2x^2,\ q_2=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+c_4x^4,$$

bestemmes de 9 Coefficienter ved 9 af de $\mu+1=13$ Ligninger, idet 9 af Störrelserne x_1, x_2, ... x_{12} tages arbitrært og de 3 andre tilligemed A bestemmes af de resterende 4 Ligninger.

Sætter man dernæst $h_3=1$, altsaa $h_1+h_2=3$, bliver $i=5$, $\mu>5$. Da dernæst h_1 og h_2 maa være Multipla af 3, fik man enten

$$h_1=0,\ h_2=3,\ \mu=12,\ \lambda=0,\ \lambda_1=2,\ \lambda_2=3$$

eller

$$h_1=3,\ h_2=0,\ \mu=12,\ \lambda=0,\ \lambda_1=1,\ \lambda_2=4.$$

Af de andre Udtryk for μ fölger endvidere

$$h_1 \overline{<} \mu-6,\ h_2 \overline{<} \mu,\ \text{altsaa}\ h_3 \overline{<} \frac{2\mu-6}{3}$$

som Betingelse for at λ_1 og λ_2 skulle blive positive. Saalænge altsaa $\mu=12$, tör h_3 ikke overskride 6. Naar man saaledes tager

$$h_3=n<7,\ \mu=12,\ h_1 \overline{<} 6,\ h_2 \overline{<} 12,$$

maa man have

$$h_1=3r,\ r \overline{<} 2,\ h_2=3(n-r),\ \lambda=0,\ \lambda_1=2-r,\ \lambda_2=4-n+r,$$

som tillige giver

$$\lambda+\lambda_1+\lambda_2=6-n.$$

Hvis man i Almindelighed sætter

$$\mu=3s,\ h_3=n,\ h_1=3r,\ h_2=3(n-r),$$

maa man tillige have

$$s \overline{>} 4,\ r \overline{<} s-2,\ n-r \overline{<} s$$

og

$$\lambda=s-4,\ \lambda_1=s-r-2,\ \lambda_2=s-n+r.$$

Man kunde ogsaa forudsætte λ, λ_1 og λ_2 givne og bestemme de övrige Störrelser, nemlig

$$\mu = 3(\lambda + 4),\ h_1 = 3(\lambda - \lambda_1 + 2),\ h_2 = 3(\lambda - \lambda_2 + 4),\ h_3 = 2\lambda - \lambda_1 - \lambda_2 + 6.$$

8. Naar man i (1) har

$$R = \sqrt[n]{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots a_\nu x^\nu} = \sqrt[n]{\varphi(x)},\ \nu > 2n,$$

ville Theoremerne (8) og (9) vedblive at gjælde og man vil ligesom i 6 kunne dele hver Classe af disse nye Transcendenter (*ultraoverelliptiske*), svarende til alle mulige hele positive Værdier af $\nu > 2n$, i 3 Arter, de 2 indbefattede i (8), eftersom Leddet II forsvinder eller ej, og den 3die i (9).

9. For de ultraoverelliptiske Functioner af 3die Art faaes desuden*)

$$\frac{\sqrt[n]{\varphi^{n-1}(x)}}{(x-a)^{k-1}} = -(k-1)\,\varphi(a)\,\Xi_k + \int \frac{\frac{n-1}{n}\varphi^1(x) - (k-1)\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{x-a}}{(x-a)^{k-1}} \frac{dx}{\sqrt[n]{\varphi(x)}} \tag{10}$$

$$\left.\begin{aligned} &\sqrt[n]{\varphi(a)} \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt[n]{\varphi(x)}} - \sqrt[n]{\varphi^{n-1}(x)} \int \frac{da}{(a-x)\sqrt[n]{\varphi^{n-1}(a)}} \\ &= \Sigma \frac{(n-1)p - m + n - 2}{n} \alpha_{m+p+2} \int \frac{x^p\,dx}{\sqrt[n]{\varphi(x)}} \int \frac{a^m da}{\sqrt[n]{\varphi^{n-1}(a)}} \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

*) I Analogi med Formlerne (326) og (343) i *Ramus* Diff. og Int. Regn. II, IV, 5, som indbefattes under de nye ved at sætte $n = 2$. Jfr. *Abel* oeuvr. compl. t. II. p. 54.